ЛЕКЦИЯ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Понятие производной функции

Рассмотрим функцию *y=f(x),* определенную на интервале (*а;в*). Возьмем любое значение $x_0 \in (a;в)$ и зададим аргументу x в точке x_0 приращение такое, что $x_0+\Delta x \in (a;в)$. Это вызовет соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Считая $\Delta x \neq 0$, рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, которое будем называть разностным отношением (в данной точке x_0). Очевидно, что разностное отношение является функцией аргумента Δx.

Определение. Производной функции *y=f(x)* в точке x_0 называется предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения $\Delta y / \Delta x$ при условии, что этот предел существует.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается символом $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$.

§2. Геометрический и механический смысл производной

*1.**Геометрический смысл производной.*** Рассмотрим график функции *y=f(x)* (рис. 1). Точки *M* и *P* имеют координаты: $M(x_0, f(x_0))$, $P(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Угол между секущей *MP* и осью *OX* обозначим $\varphi(\Delta x)$.

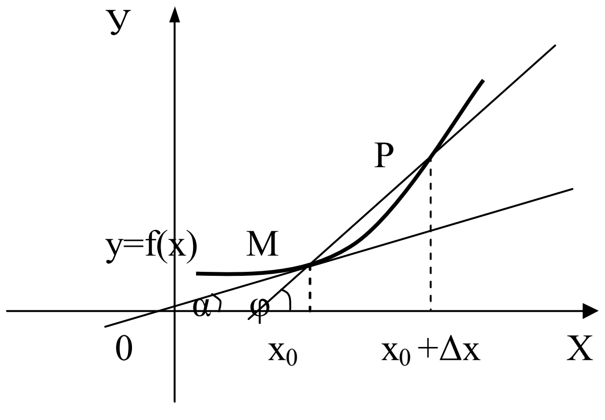

Рис.1

Имеем $tg\varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Так как секущая *MP* при $\Delta x \to 0$ переходит в касательную, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi(\Delta x) = tg\alpha$, где α –угол, образованной касательной с осью *OX*.

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следовательно, $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$.

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 является угловым коэффициентом касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

2.Механический смысл производной. Пусть функция $s=f(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т.е. зависимость пути s, пройденного точкой от начала отсчета за время t. Тогда производная $f'(t_0)$ - это мгновенная скорость $v(t_0)$ точки в момент времени t_0.

§3. Понятие дифференцируемости функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором интервале $(a,в)$ и x - некоторая фиксированная точка этого интервала, а Δx– любое приращение аргумента x такое, что $x+\Delta x \in (a,в)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в данной точке x, если ее приращение Δy в этой точке, соответствующее приращению Δx может быть представлено в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (1)$$

где A - некоторое число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ - функция бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Теорема 3.1. Для того, чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в данной точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную.

Отметим, что при этом $A = f'(x)$. Следовательно, условие (1) дифференцируемости функции можно записать в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (2)$$

Теорема 3.2. Если функция дифференцируема в данной точке x, то она непрерывна в этой точке.

§4. Понятие дифференциала функции.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. ее приращение Δy в этой точке представимо в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (3)$$

Определение. Дифференциалом dy функции $y=f(x)$ в точке $\boldsymbol{x}$ называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции:

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (4)$$

Дифференциалом независимой переменной x называется приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x имеет вид

$$dy = f'(x)dx.$$

(5)

Геометрический смысл дифференциала функции нетрудно уяснить из рис.2, на котором изображены график функции *y=f(x)* и касательная *MQ* к графику в точке *(x,f(x))*.

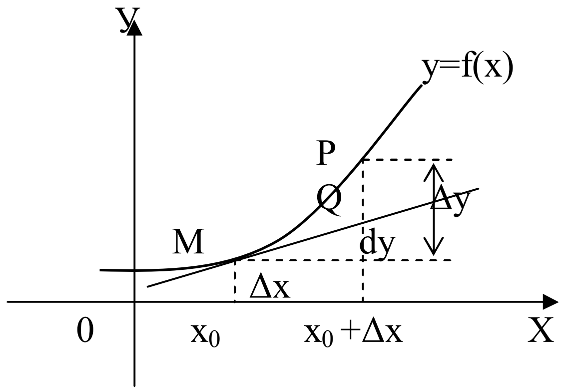

Рис. 2

Дифференциал *dy* равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке М.

§5. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

Теорема 5.3. Если функции *u=u(x), v=v(x)* дифференцируемы в данной точке *x*, то в этой точке дифференцируемы их сумма, разность, произведение и частное (частное при условии, что *v(x)≠0*), причем имеют место формулы:

$1^0. \left[u(x) \pm v(x)\right]' = u'(x) \pm v'(x)$, в частности $\left[c \cdot u(x)\right]' = c \cdot u'(x)$,

$2^0. \left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x).$

$$3^0. \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \qquad (v(x)\neq 0).$$

§ 6. Производная обратной функции. Правило дифференцирования сложной функции

Пусть функция *y=f(x)* удовлетворяет условиям теоремы существования обратной функции и функция $x = \varphi(y)$ является для нее обратной.

Теорема 5.4. Если функция *y=f(x)* имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = \varphi(y)$ также имеет в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ производную, причем $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Теорема 5.5. Если функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция *y=f(x)* дифференцируема в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и справедлива формула: $y'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$.

§7. Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α - любое число)

2. $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a>0$, $a\neq 1$)

2a. $\left(e^x\right)' = e^x$

3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$)

3a. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$ ($x > 0$)

4. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

5. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

6. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ($x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k=0,\pm1,...$).

7. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq k\pi$, $k=0,\pm1,...$).

8. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$).

9. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$).

10. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

11. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

§8. Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ независимой переменной x дифференцируема в точке x. Тогда, как известно, для дифференциала dy (первого дифференциала) этой функции справедливо представление

$$dy = f'(x)dx.$$

(6)

Пусть теперь $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, в свою очередь, дифференцируемая функция аргумента t. Оказывается, что и в этом случае форма (6) для первого дифференциала остается неизменной. Это свойство первого дифференциала функции принято называть инвариантностью его формы.

На основании этого свойства как следствие из теоремы о производной суммы, произведения и частного получаются следующие соотношения для дифференциалов:

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \qquad d(u \cdot v) = vdu + udv; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \ (v \neq 0).$$